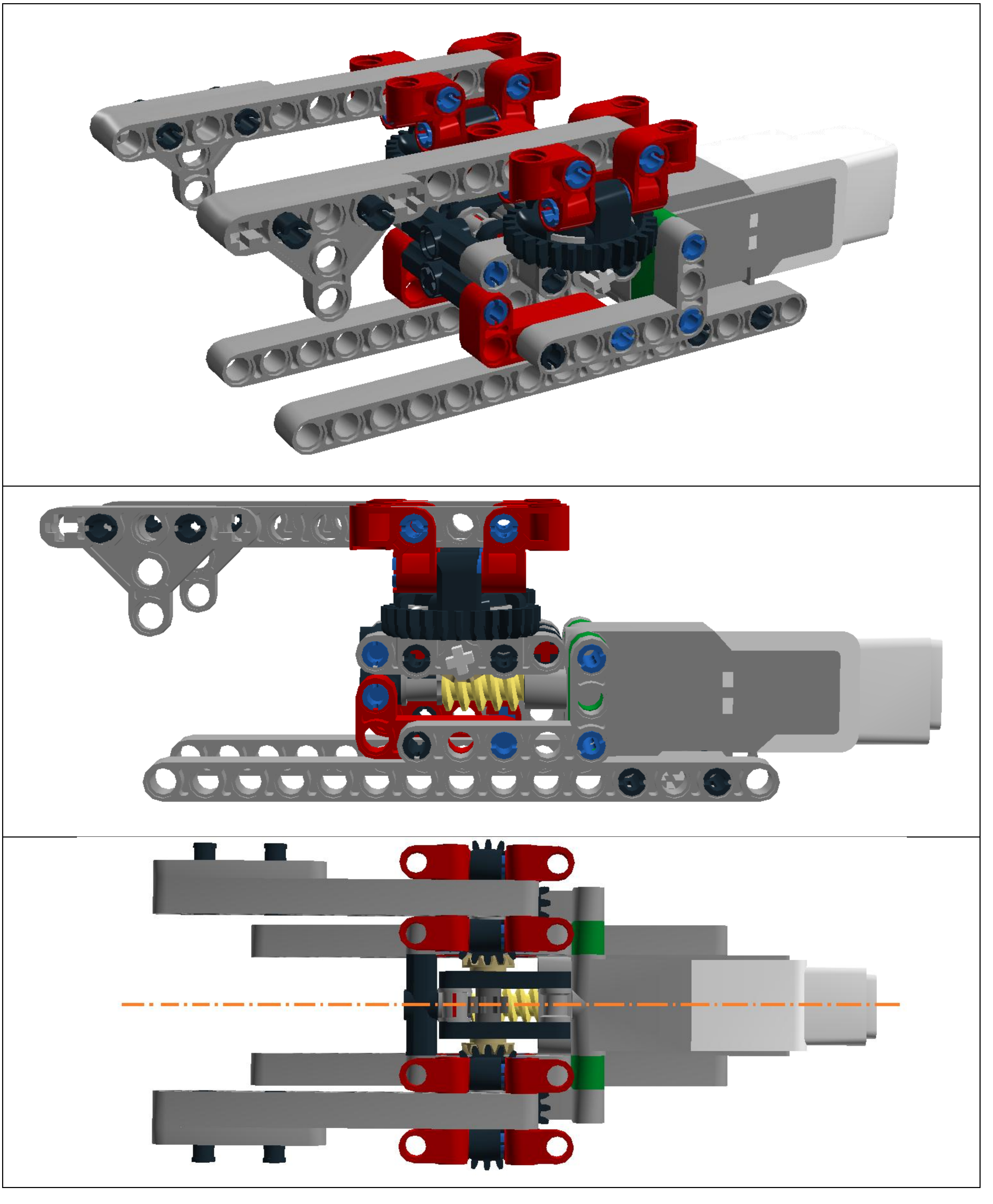
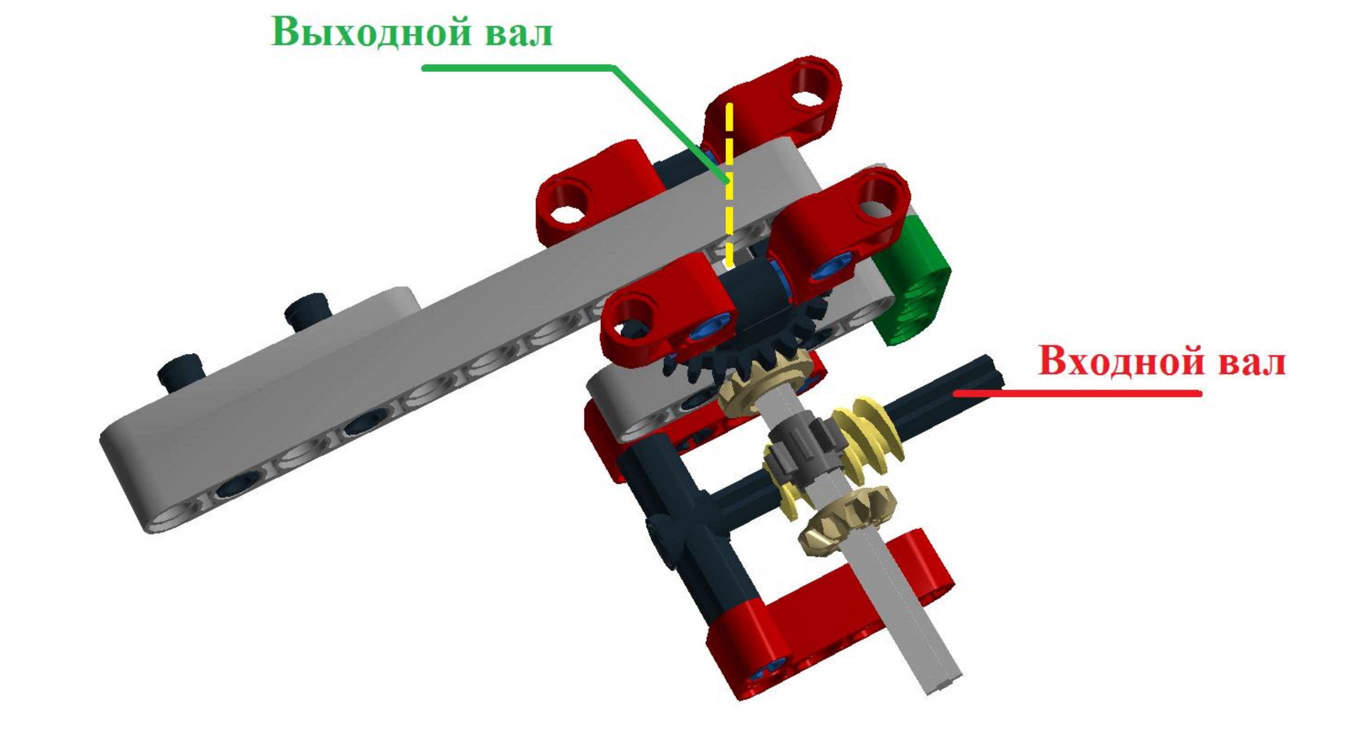
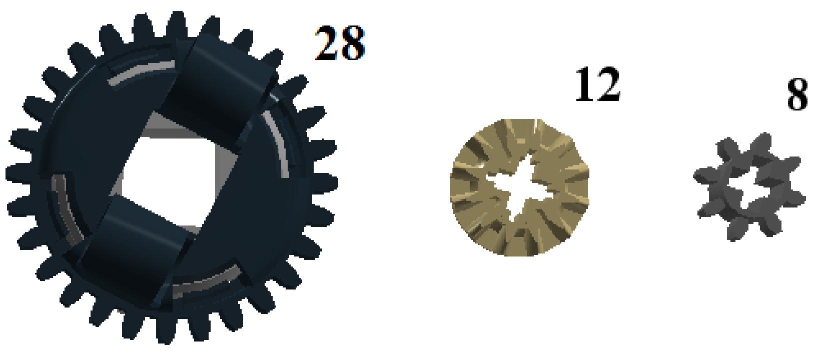
№1

Саша сделал фотографии сборки манипулятора с разных ракурсов, после чего отметил на них входной и выходной валы.







Количество зубьев

А) (2 балла) Определите, скорость вращения выходного вала больше или меньше скорости вращения входного вала?

Выберите один из следующих вариантов ответа:

1) Скорость вращения выходного вала меньше скорости вращения входного вала;
2) Скорость вращения выходного вала больше скорости вращения входного вала;
3) Скорость вращения выходного вала равен скорости вращения входного вала.

Б) (2 балла) Во сколько раз? Запишите ответ в виде отношения. Например: «11:7»;

В) (6 баллов) Захват данного манипулятора состоит из двух одинаковых частей. Каждая из частей захвата состоит из прямой балки и прикрепленной к ней с внешней стороны треугольной пластины. Расстояние от конца балки до воображаемого выходного вала (совпадающего с осью вращения балки) равно $a = 7$ см.

В начальный момент времени части манипулятора расположены так, что прямые балки параллельны оси мотора (оси входного вала). При этом расстояние между балками равно $b = 5$ см.

После этого вал мотора повернулся на угол $\alpha = 560°$, при этом манипулятор «раскрыл захват».

Определите, каким стало наибольшее расстояние между концами прямых балок. Толщиной балок и пластин пренебречь. Ответ дайте в сантиметрах. При необходимости, ответ округлите до целых.

Решение:

Рассчитаем передаточное отношение:

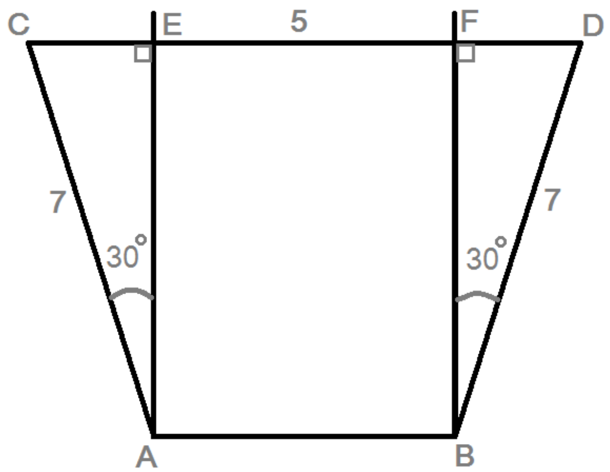
$$\frac{8}{1} \times \frac{28}{12} = \frac{56}{3}$$

Так как передаточное отношение больше единицы, то это понижающая передача, значит, скорость вращения выходного вала меньше скорости вращения входного вала.

Рассчитаем угол, на который повернуться части манипулятора после завершения поворота мотора на 560°. Он будет в $\frac{56}{3}$ раз меньше, чем 560°:

$$560^{\circ} : \frac{56}{3} = \frac{560 \times 3}{56} = 30^{\circ}$$

Сделаем чертеж:



Расстояние CD между концами прямых балок можно определить следующим образом: CD=CE+EF+FD.

Определим, на сколько увеличится расстояние между концами прямых балок. Это увеличение будет состоять из двух равных отрезков CE и FD.

$$CE=ED=CA\times\sin(30°)=7\times0{,}5=3{,}5 \text{ см.}$$

Тогда CD=3,5+5+3,5=12 см.

Ответ:

А) 1) Скорость вращения выходного вала меньше скорости вращения входного вала;

Б) 56:3

В) 12

№2 (10 баллов)

Робот должен преодолеть трассу за минимальное время. От старта до финиша можно перемещаться только вдоль дорог, которые проложены между контрольными точками (*См. Рисунок №1*).

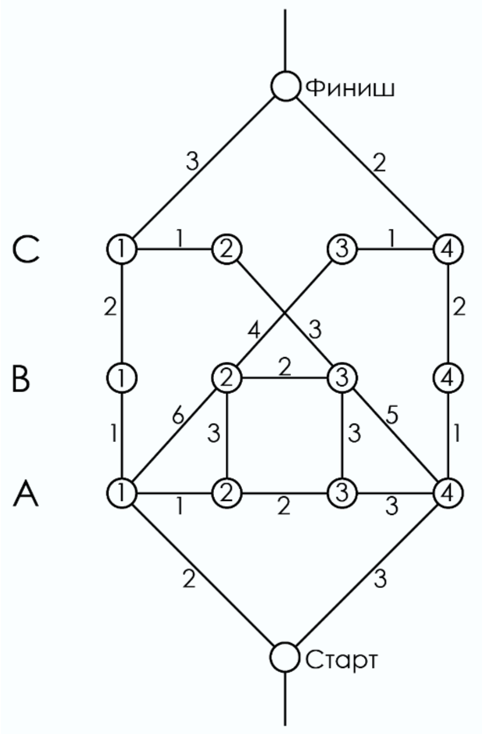


Рисунок №1

Для унификации название каждой из контрольных точек состоит из буквы латинского алфавита и цифры. Латинская буква относится к группе из трех узловых точек. Номер точки указан внутри узловой точки.

Робот обязательно должен посетить узловые точки A1, A4, B3 и C2.

По любой дороге проехать можно только один раз. Время, за которое робот преодолеет данную дорогу указано около нее в минутах.

1) Определите минимальное время, за которое робот преодолеет трассу, при указанных условиях;

2) Укажите минимальный по времени путь, при указанных условиях. Для этого запишите последовательность узловых точек, разделенных запятыми, например: «*A1, A2, A3*». **Точки старта и финиша в ответе не указываются.**

Решение:

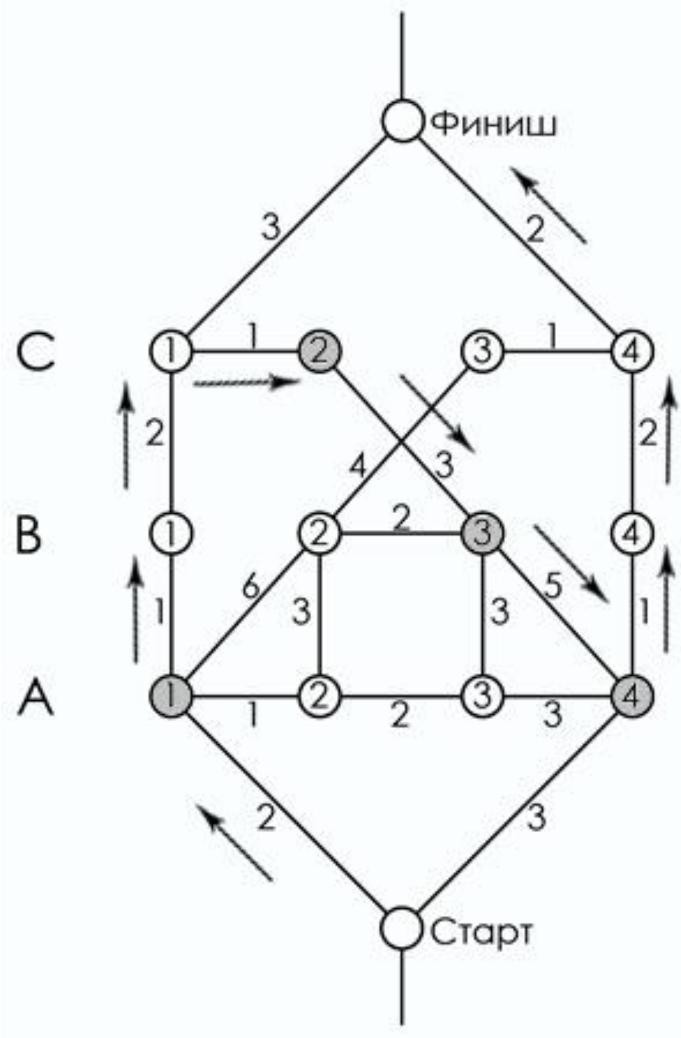


Рисунок №1.2

На рисунке 1.2 серым цветом выделены точки, обязательные для посещения.

Путь A1, B1, C1, C2, B3, A4, B4, C4 является минимальным по времени и занимает время T=2+1+2+1+3+5+1+2+2=19 единиц

Ответ:

1) 19 единиц
2) Путь: A1, B1, C1, C2, B3, A4, B4, C4

№3 (15 баллов)

На складе реализован метод автоматической сортировки посылок. В результате данной сортировки посылки оказываются около стеллажей, на которые робот-кладовщик и должен их разместить. Робот всегда размещает посылку на том стеллаже, к которому она расположена ближе. Если посылка оказывается ровно посередине между стеллажами, то робот размещает посылку на стеллаже, расположенном дальше от входа. На стеллажах всегда хватает места для всех принятых посылок.

Стеллажи расположены в ряд вдоль одной прямой. На складе 5 стеллажей. Расстояние между крайними стеллажами и стенами равно 3 метра. Расстояние между стеллажами увеличивается по мере удаления стеллажей от входа:

- между первым и вторым стеллажом расстояние равно 3 метрам;

- между вторым и третьим – сумме расстояний между первым и вторым стеллажами и первым стеллажом и стеной;

- между третьим и четвертым – сумме расстояний между вторым и третьим стеллажами и вторым и первым стеллажами и так далее.

В начале рабочего дня все стеллажи пусты, а робот-кладовщик находится на зарядной станции, расположенной на расстоянии 1 метр от стены противоположной входу.

За время рабочего дня на складе появляются посылки на следующих расстояниях от входа на склад:

- первые 10 посылок появляются на расстояниях по закону $a_1 = 5$ м, $a_{n+1} = a_n + 3$ м, где $0 < n < 11$;

- следующие 6 посылок появляются на расстояниях по закону $a_n = (7 - n)^2$ м, где $0 < n < 7$;

- следующие 6 появляются на расстояниях по закону $a_n = 2^n + 1$, где $0 \le n \le 5$.

Посылки появляются в указанной последовательности.

После появления посылки робот перемещает ее на соответствующий стеллаж, после чего остается около стеллажа в ожидании появления новой посылки. Посылки появляются по одной, каждая следующая появляется после того, как робот поместит на стеллаж предыдущую.

После того, как робот закончит размещать посылки на стеллажах, он возвращается на зарядную станцию.

Определите:

А) (2 балла) Сколько посылок окажется на первом от входа стеллаже в конце рабочего дня?

Б) (2 балла) Сколько посылок окажется на втором от входа стеллаже в конце рабочего дня?

В) (2 балла) Сколько посылок окажется на третьем от входа стеллаже в конце рабочего дня?

Г) (2 балла) Сколько посылок окажется на четвертом от входа стеллаже в конце рабочего дня?

Д) (2 балла) Сколько посылок окажется на пятом от входа стеллаже в конце рабочего дня?

Е) (5 баллов) Какое расстояние робот проедет за рабочий день?

Решение:

1. Необходимо определить местоположение стеллажей.
   - По условию задачи первый стеллаж находится на расстоянии 3 м от стены.
   - Также по условию задачи между первым и вторым стеллажом расстояние равно 3 метрам.
   - Расстояние между вторым и третьим – сумме расстояний между первым и вторым стеллажами и первым стеллажом и стеной

$$3+3=6 \text{ м}$$

   - Между третьим и четвертым – сумме расстояний между вторым и третьим стеллажами и вторым и первым стеллажами

$$3+6= 9 \text{ м}$$

   - Между четвертым и пятым– сумме расстояний между третьим и четвертым, и вторым и третьим стеллажами

$$6+9=15 \text{ м}$$

Таким образом, мы получили следующую схему склада.

Объект	1-й стеллаж С1	2-й стеллаж С2	3-й стеллаж С3	4-й стеллаж С4	5-й стеллаж С5	Зарядная станция З.с.	Правая стена склада
Расстояние от левой стены м	3	6	12	21	36	38	39

2. Далее необходимо определить места появления посылок.
   - Первые 10 посылок появляются на расстояниях от входа на склад по закону a_1=5 м, $a_{n+1}=a_n+3$ м где $0<n<11$.
     Вычислим значение a_2
     $a_2=a_1+3=5+3=8$
     Аналогичным образом вычислим остальные значения a_n .

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

   - Следующие 6 посылок появляются на расстояниях по закону $a_n=(7-n)^2$ м, где $0<n<7$.
     $a_1=(7-1)^2=6^2=36$

Аналогичным образом вычислим остальные значения a_n.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
36	25	16	9	4	1

- Следующие 6 появляются на расстояниях по закону $a_n = 2^n + 1$, где $0 \le n \le 5$.
  $a_0 = 2^0 + 1 = 2$
  $a_1 = 2^1 + 1 = 3$

  Аналогичным образом вычислим остальные значения a_n.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	3	5	9	17	33

3. Данную задачу можно решить графически или с использованием таблицы.

При выборе стеллажа, на который необходимо отвезти посылку, следим за тем, чтобы расстояние от посылки до стеллажа было менее половины расстояния между стеллажами, так как по условию задачи посылка отвозится на ближний к ней стеллаж. Если посылка находится точно посередине между стеллажами, то она отвозится на дальний от входа стеллаж.

От стеллажа до посылки	Расстояние от стеллажа до посылки	От посылки до стеллажа	Расстояние от посылки до стеллажа
З.с. 38 - 5	33	5-С2 (6)	1
С2 (6)-8	2	8-С2 (6)	2
С2 (6)-11	5	11-С3(12)	1
С3(12)-14	2	14-С3(12)	2
С3(12)-17	5	17-С4(21)	4
С4(21)-20	1	20-С4(21)	1
С4(21)-23	2	23-С4(21)	2
С4(21)-26	5	26-С4(21)	5
С4(21)-29	8	29-С5(36)	7
С5(36)-32	4	32-С5(36)	4
С5(36)-36	0	35-С5(36)	0
С5 (36)-25	11	25-С4(21)	4
С4 (21)-16	5	16-С3(12)	4
С3(12)-9	3	9-С3(12)	3
С3(12)-4	8	4-С1(3)	1
С1(3)-1	2	5-С1(3)	2
С1(3)-2	1	2-С1(3)	1
С1(3)-3	0	3-С1(3)	0
С1(3)-5	2	5-С2(6)	1
С2 (6)-9	3	9-С3(12)	3

C3(12)-17	5	17-C4(21)	4
C4(21)-33	12	33-C5(36)	3
C5(36) –З.с 38	2		0
	121		55
Итого:	176		

Из колонки №3 таблицы видно, что в конце рабочего дня количество посылок на стеллажах будет равно:

- На первом стеллаже – 4 посылки;
- На втором – 3 посылки;
- На третьем – 5 посылок;
- На четвертом – 6 посылок;
- На пятом – 4 посылки.

За рабочий день робот проедет 176 м.

Ответ:

В конце рабочего дня

А) 4

Б) 3

В) 5

Г) 6

Д) 4

Е) 176

№4 (15 баллов)

Робот-художник движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на нее изображение (См. *Рисунок №2*) при помощи кисти, закрепленной в центре колесной базы. Робот оснащен двумя отдельно управляемыми колесами, расстояние между центрами колес составляет $L = 180$ см, диаметр колеса робота $d = 20$ см, максимальная скорость вращения моторов $w = 3$ оборота в секунду.

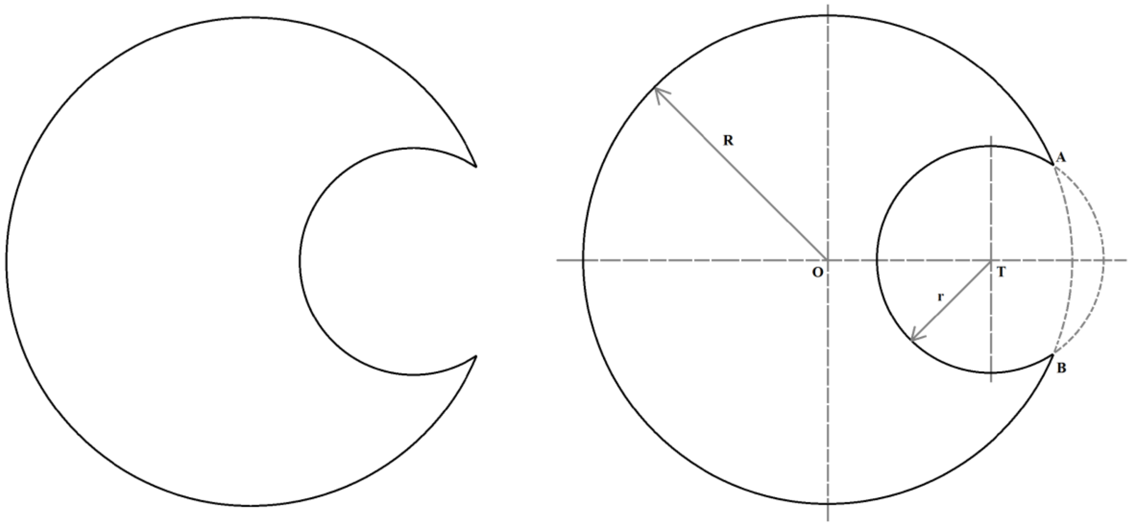


Рисунок №2

Заданы следующие параметры изображения: радиус большей окружности $R = 6$ м, радиус меньшей окружности $r = 2\sqrt{3}$ м, расстояние между центрами окружностей $OT = 2\sqrt{3}$ м.

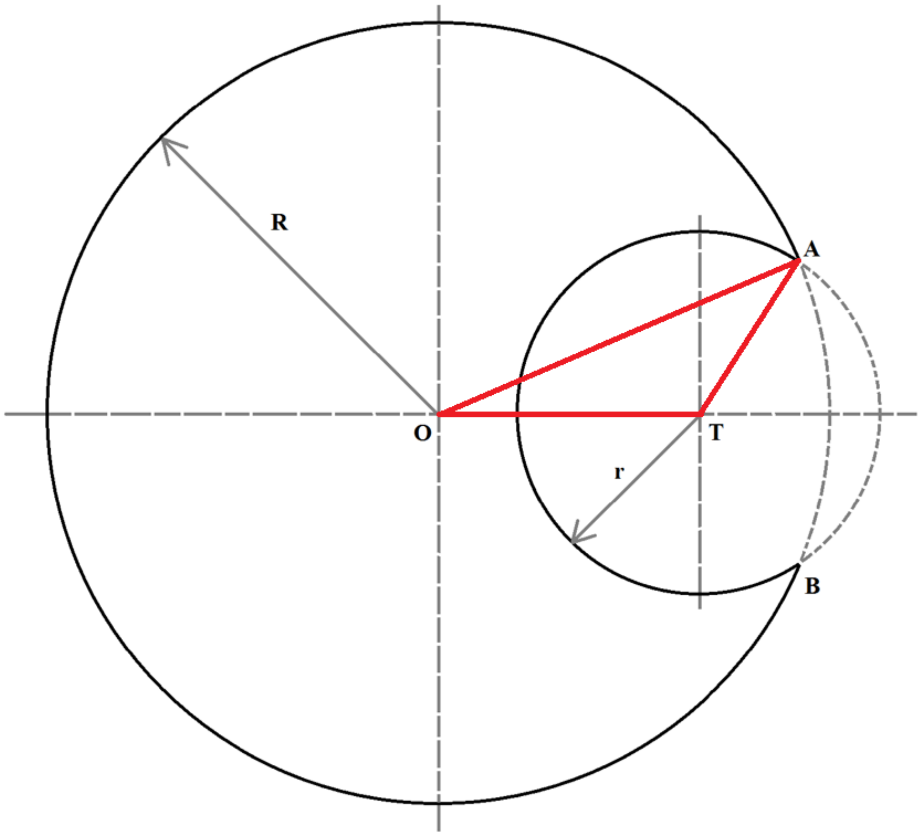
Робот может двигаться вперед и делать развороты на месте. Известно, что робот смог начертить данную фигуру за минимально возможное время.

А) (7 баллов) Определите время движение робота по дугам фигуры. Ответ дайте в секундах, округлив его до целых;

Б) (8 баллов) Определите время разворота робота на месте. Ответ дайте в секундах, округлив его при необходимости до сотых.

Решение:

Сделаем чертеж:



Наша фигура состоит из дуг окружностей двух разных радиусов.

Для того, чтобы определить градусные меры дуг, мы можем определить градусные меры центральных углов. Для этого рассмотрим треугольник *OTA*. В нем $TA = r = 2\sqrt{3}$ *м*, $OA = R = 6$ *м* , $OT = 2\sqrt{3}$ *м*.

Применим теорему косинусов для определения величины угла *OTA*:

$$OA^2 = OT^2 + TA^2 - 2\ OT\ TA\ \cos\angle OTA$$

$$6^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times (2\sqrt{3})^2 \cos\angle \mathrm{OTA}$$

$$36 = 12 + 12 - 24\cos\angle \mathrm{OTA}$$

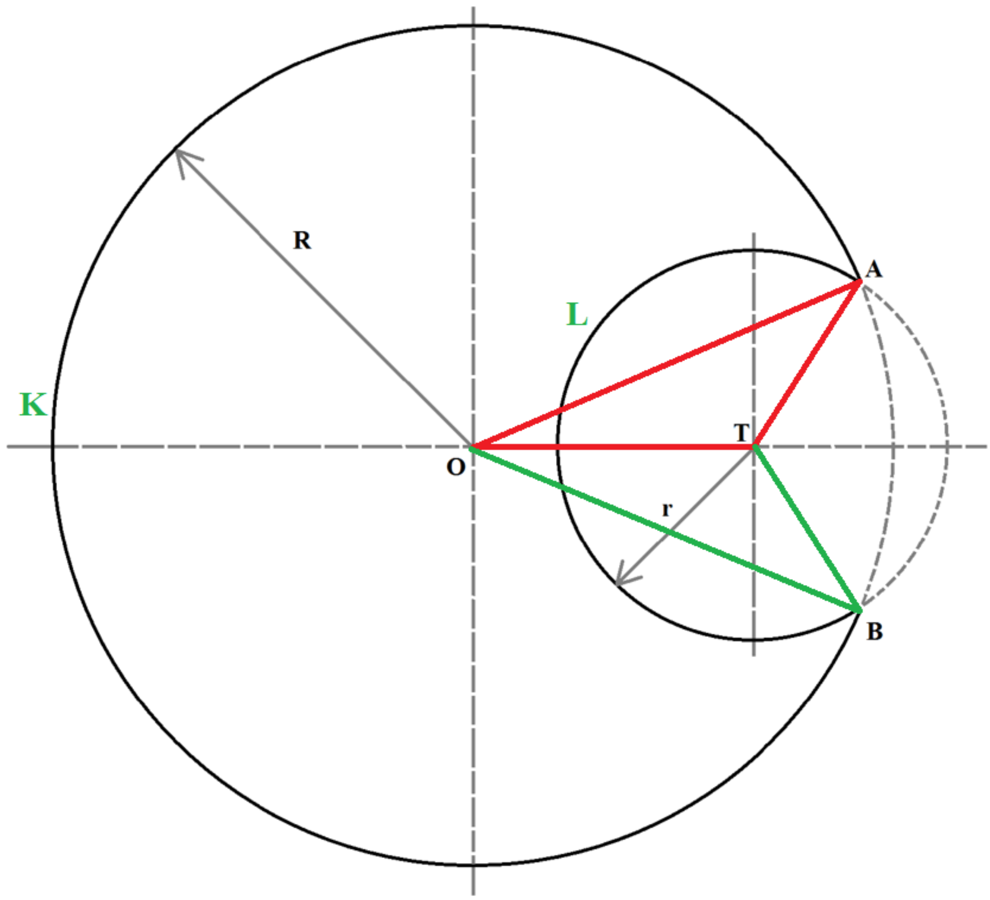
$$cos\angle \mathrm{OTA} = \frac{12}{-24} = -0{,}5$$

Соответственно, $\angle OTA = 120°$.

Так как $TA = OT$, то треугольник *OTA* – равнобедренный. А это значит, что $\angle AOT = \angle OAT$.

Соответственно,

$\angle AOT = \angle OAT = (180° - \angle OTA) : 2 = (180° - 120°) : 2 = 60° : 2 = 30°$



Рассмотрим треугольники *OTA* и *OTB*. Они равны по трем сторонам. Соответственно, $\angle AOT = \angle BOT = 30°$.

Тогда $\angle AOB = \angle AOT + \angle BOT = 30° + 30° = 60°$.

Значит, градусная мера дуги $AKB = 360° - \angle AOB = 360° – 60° = 300°$.

Далее, определим градусную меру дуги *ALB*.

$\smile ALB = \angle ATO + \angle OTB$

$\angle ATO = \angle OTB = 120°$

$\smile ALB = 240°$

Определим радиусы окружностей, по которым движется внешнее колесо робота при длине колесной базы равной $L = 180$ *см* $= 1,8$ м.
Для меньшей окружности

$r_{внеш} = r + \frac{L}{2} = 2\sqrt{3} + 0,9.$

Для большей окружности

$R_{внеш} = R + \frac{L}{2} = 6 + 1{,}8 : 2 = 6 + 0{,}9 = 6{,}9.$

Определим длины дуг окружностей, которые проходит внешнее колесо робота.
Длина дуги меньшей окружности равна

$$l_1 = 2\pi r_{\text{внеш}} \frac{\angle \text{ATB}}{360^\circ} = 2\pi \left(r + \frac{L}{2}\right)\frac{240}{360} = \frac{4}{3}\pi\left(r + \frac{L}{2}\right).$$

Длина большей окружности

$$l_2 = 2\pi R_{\text{внеш}} \frac{\angle \text{AOB}}{360^\circ} = 2\pi \left(R + \frac{L}{2}\right)\frac{300}{360} = \frac{5}{3}\pi\left(R + \frac{L}{2}\right).$$

Суммарная длина траектории робота

$$l_1 + l_2 = \frac{4}{3}\pi\left(r + \frac{L}{2}\right) + \frac{5}{3}\pi\left(R + \frac{L}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\left(4r + 5R + \frac{9}{2}L\right).$$

Далее определим длину окружности колеса.
Диаметр колеса робота равен d = 20 см = 0,2 м, соответственно длина окружности колеса

$$l_3 = \pi d.$$

Максимальная скорость моторов равна $w = 1$ оборот в секунду.
Скорость движения робота

$$v = l_3 w = \pi d w.$$

Определим время, затраченное роботом на движение по дугам фигуры

$$T = \frac{l_1 + l_2}{\pi d w} = \frac{\frac{\pi}{3}\left(4r + 5R + \frac{9}{2}L\right)}{\pi d w} = \frac{4r + 5R + 4{,}5\,L}{3dw}$$

$$= \frac{4 \times 2\sqrt{3} + 5 \times 6 + 4{,}5 \times 0{,}9}{3 \times 0{,}2 \times 1} = \frac{8\sqrt{3} + 30 + 4{,}05}{0{,}6} = \frac{8\sqrt{3} + 34{,}05}{0{,}6} \approx 80\ \text{с}$$

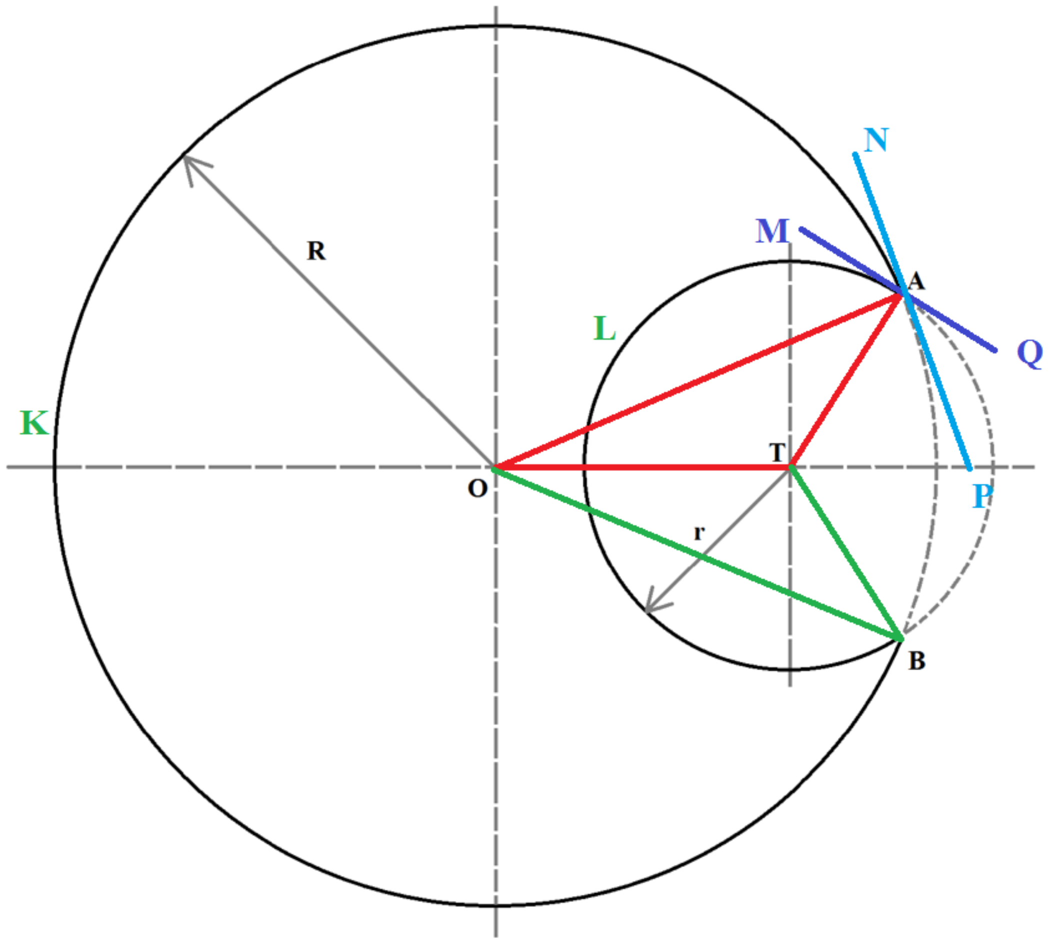
Для того, чтобы минимизировать время, необходимое для разворота на месте, робот должен стартовать из точки A или из точки B.

При старте из этих точек робот должен будет повернуть всего один раз, а при старте из любых других точек – дважды.

В силу симметрии фигуры, робот при старте из точки A или из точки B должен будет развернуться на месте на равные углы.

Предположим для определенности, что робот стартует в точке B. При старте в точке A можно провести точно такие же рассуждения.

Для того, чтобы определить, на сколько градусов робот должен развернуться на месте в точке A, проведем через точку A касательные к обеим окружностям:



У нас MQ – это касательная к меньшей окружности, а NP – это касательная к большей окружности.

Если робот будет переходить в точке А с меньшей окружности на большую, он должен будет развернуться на месте на $\angle NAQ$.

Если робот будет переходить в точке А с большей окружности на меньшую, он должен будет развернуться на месте на $\angle PAM$.

Поскольку углы $\angle NAQ$ и $\angle PAM$ – вертикальные, то $\angle PAM=\angle NAQ$. Соответственно, все равно, в каком порядке робот будет вычерчивать дуги окружностей – сперва большую, а потом меньшую, или сперва меньшую, а потом большую.

Рассчитаем величину $\angle PAM=180° - \angle NAM$.

Обозначим $\angle NAM=x$. Тогда $\angle QAP=\angle NAM=x$.

Поскольку NP – это касательная к окружности радиуса OA, то $\angle NAO=90°$.

Поскольку MQ – это касательная к окружности радиуса TA, то $\angle QAT=90°$.

Тогда $\angle MAO=90°-\angle NAM=90°-x$, $\angle PAT=90°-\angle QAP=90°-x$.

Значит, $\angle OAT=180° - x - (90° - x) - (90° - x)=180° - x - 90° + x - 90° + x =x$

То есть, ∠NAM=x=∠OAT=30°.

Значит, ∠PAM=180° - ∠NAM=180° - 30°=150°.

Определим время, за которое робот повернется на месте на 150°:

$$T_2 = \frac{2\pi \frac{L}{2} \frac{150^\circ}{360^\circ}}{\pi d w} = \frac{5}{12} \frac{L}{dw} = \frac{5 \times 180}{12 \times 20 \times 3} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \text{ с}$$

Ответ:

А) Время движение робота по дугам фигуры 80 с.

Б) Время разворота робота на месте 1,25 с.